УДК 511.138

В. К. Шурыгин

РАЗЛОЖЕНИЕ НЕПОЛНОГО СТАНДАРТНОГО БАЗИСА ПОЛЯ $Q(\sqrt[m]{D})$ В МНОГОМЕРНУЮ ЦЕПНУЮ ДРОБЬ

Приведен алгоритм разложения неполного стандартного базиса поля иррациональностей $Q(\sqrt[m]{D})$ в многомерную периодическую цепную дробь общего вида.

The algorithm of decomposition of incomplete standard basis of the field $Q(\sqrt[m]{D})$ in the multidimensional periodic continued fraction of the general form.

Ключевые слова: поле алгебраических иррациональностей, единицы поля, стандартный базис поля, алгоритм Якоби — Перрона, многомерная цепная дробь.

Key words: algebraic irrationalities field, units of field, standard basis of the field, Jacobi — Perron algorithm, multidimensional continued fraction.

Введение

В последние десятилетия значительно возрос интерес к известному алгоритму Якоби [1—3] и его обобщениям [4—9], приводящим к понятию многомерных цепных дробей. Объясняется это большей частью тем, что с помощью обычных цепных дробей, получаемых посредством алгоритма Евклида, полностью решается вопрос о нахождении так называемых единичных элементов в кольце $O[\sqrt{t}]$, образованном присоединением к кольцу целых рациональных чисел иррациональности $\sqrt{t}$, где t — целое рациональное число, не содержащее квадратов. В дальнейшем под $O[\sqrt[m]{t}]$ будем понимать кольцо действительных чисел вида $\sum_{k=0}^{m-1} a_k \sqrt[m]{t^k}$, где $t, a_k, k=0,1,\ldots,m-1$ суть целые рациональные числа, t не содержит m-х степеней целых чисел с арифметическими операциями, индуцированными полем действительных чисел. Набор иррациональностей $\sqrt[m]{t},\ldots,\sqrt[m]{t^{m-1}}$ при этом будем называть *неполным стандартным базисом* кольца $O[\sqrt[m]{t}]$. Попытки применения алгоритма Якоби при нахождении единиц в $O[\sqrt[3]{t}]$ позволили решить эту задачу лишь частично. Связано это с периодичностью алгоритма Якоби. Перроном [8] доказано, что так называемая правильная двумерная цепная дробь в случае ее периодичности сходится к неполному стандартному базису кольца $O[\sqrt[3]{t}]$, более того, этот результат легко обобщается на случай $O[\sqrt[m]{t}]$, $m>3$ [9].

Однако доказательства обратного утверждения о разложении базиса кольца $O[\sqrt[m]{t}]$ в периодическую $(m-1)$-мерную цепную дробь при $m \geqslant 3$ неизвестно до сих пор. Для нахождения же единиц упомянутого кольца используются именно периодические многомерные цепные дроби. В многочисленных работах Бернштейна [2—7] и некоторых других авторов приведены бесконечные классы колец $O[\sqrt[m]{t}]$, в основном при $m=3$, для которых многомерная цепная дробь, получаемая при разложении неполного базиса кольца, оказывается периодической, но в общем случае периодичность таких разложений не доказана.

Цель работы — исследование периодичности многомерной цепной дроби общего вида, которая получается при разложении неполного базиса кольца $O[\sqrt[m]{t}]$. Приводится алгоритм разложения базиса кольца $O[\sqrt[m]{t}]$ в периодическую многомерную цепную дробь общего вида, из которой для некоторых бесконечных классов параметра t могут быть получены правильные многомерные периодические цепные дроби. Схожие результаты имеются в работах автора [13—15]. Вопрос сходимости разложений в работе не обсуждается. Полученные разложения не всегда совпадают с приводимыми другими авторами, но последовательности так называемых *подходящих векторов*, выписанные для приводимых разложений и полученных ранее, содержат общие элементы.

1. Определение *m*-мерной цепной дроби

1.1. Следуя *Бриньону* [10], определим m-мерную цепную дробь. В $(m+1)$-мерном пространстве рассмотрим последовательность векторов

$$\mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_n^{(m+1)} \\ \vdots \\ a_n^{(1)} \end{pmatrix}, n = 0, 1, \ldots, \tag{1.1}$$

при этом полагаем $a_0^{(m+1)} = 1$. Процесс образования векторов из $(m+1)$-мерного пространства с помощью соотношения

$$\begin{pmatrix} A_n^{(1)} \\ \vdots \\ A_n^{(m+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n-m-1}^{(1)} & \cdots & A_{n-1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n-m-1}^{(m+1)} & \cdots & A_{n-1}^{(m+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n^{(m+1)} \\ \vdots \\ a_n^{(1)} \end{pmatrix}, n = 0, 1, \ldots, \tag{1.2}$$

где $A_j^{(k)} = \begin{cases} 1, & j+k=0, \\ 0, & j+k \neq 0; \end{cases}$ $k = 1, 2, \ldots, m+1; j = -1, -2, \ldots, -(m+1)$,

будем называть *m-мерной цепной дробью*. Такое название записанного итерационного процесса связано с тем, что в случае $m=1$ этот процесс приводит к образованию векторов двумерного пространства, координаты которых суть элементы подходящих дробей обычной цепной дроби общего вида $a_0^{(1)} + \cfrac{a_1^{(2)}}{a_1^{(1)} + \cfrac{a_2^{(2)}}{a_2^{(1)} + \ddots}}$.

1.2. Данную (1.1) и (1.2) m-мерную цепную дробь запишем таблицей

$$\begin{bmatrix} & a_1^{(m+1)} & \cdots & a_n^{(m+1)} & \cdots \\ a_0^{(m)} & a_1^{(m)} & \cdots & a_n^{(m)} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0^{(1)} & a_1^{(1)} & \cdots & a_n^{(1)} & \cdots \end{bmatrix}, \tag{1.3}$$

конечной или бесконечной в зависимости от конечности или бесконечности последовательности (1.1). В первом случае m-мерную цепную дробь естественно назвать *конечной*, во втором — *бесконечной*. Вектор (1.1), если следовать терминологии обычных цепных дробей [11], назовем n-м *звеном* m-мерной цепной дроби (1.3), а его координаты — *членами* n-го звена. $\mathbf{A}_n^{(m+1)} = \begin{pmatrix} A_n^{(1)} \\ \vdots \\ A_n^{(m+1)} \end{pmatrix}$ — n-й *подходящий вектор* m-мерной цепной дроби, а вектор формальных дробей $\mathbf{D}_n^{(m)} = \left(\frac{A_n^{(1)}}{A_n^{(m+1)}}, \ldots, \frac{A_n^{(m)}}{A_n^{(m+1)}} \right)$ — n-й *вектор подходящих дробей*. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{D}_n^{(m)}$ существует и конечен, то m-мерную цепную дробь естественно назвать *сходящейся*, а сам предел, то есть $\mathbf{D}^{(m)} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{D}_n^{(m)} = (D_1^{(m)}, \ldots, D_m^{(m)})$, — *значением* цепной дроби (1.3), и говорить, что m-мерный вектор $\mathbf{D}^{(m)}$ *разлагается* в m-мерную цепную дробь (1.3).

1.3. Методом математической индукции установим соотношение $\det \begin{pmatrix} A_n^{(1)} & \cdots & A_{n-m}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ A_n^{(m+1)} & \cdots & A_{n-m}^{(m+1)} \end{pmatrix} = (-1)^{m(n-1)} \prod\limits_{k=1}^{n} a_k^{(m+1)}$, доказанное *О. Перроном* [9] в случае, когда в m-мерной цепной дроби (1.3) все $a_n^{(\nu)}$ — целые числа, $\nu = 1, 2, \ldots, m+1; n = 0, 1, \ldots,$ причем $a_n^{(m+1)} = 1; n = 0, 1, \ldots;$ $a_n^{(\nu)} \geqslant 0;$ $\nu = 1, 2, \ldots, m;$ $n = 1, 2, \ldots$ В этом случае, когда на члены звеньев цепной дроби налагаются такие условия, m-мерную цепную дробь называют *правильной*.

1.4. К правильной цепной дроби приводит так называемый m-мерный алгоритм Якоби — Перрона, который, согласно *Л. Бернштейну* [4], может быть определен так. Для вектора m-мерного пространства $\aleph_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0^{(m)} \\ \vdots \\ \alpha_0^{(1)} \end{pmatrix}, m \geqslant 1$, с помощью некоторой функции T строится $\mathbf{a}_0 = \begin{pmatrix} a_0^{(m)} \\ \vdots \\ a_0^{(1)} \end{pmatrix}$, $a_0^{(\nu)} = T(\alpha_0^{(\nu)}), \nu = 1, 2, \ldots, m,$ — другой вектор.

Например, если $\aleph_0 \in R^m$, то в качестве T можно взять так называемую *целую часть числа*, то есть $a_0^{(\nu)} = [\alpha_0^{(\nu)}], \nu = 1, \ldots, m.$ По векторам $\aleph_0$ и $\mathbf{a}_0$ строится новый вектор $\aleph_1$:

$$\alpha_1^{(1)} = \frac{1}{\alpha_0^{(m)} - a_0^{(m)}}, \alpha_1^{(\nu)} = \frac{\alpha_0^{(\nu-1)} - a_0^{(\nu-1)}}{\alpha_0^{(m)} - a_0^{(m)}}, \nu = 2, 3, \ldots, m.$$

Затем процесс повторяется для $\aleph_1$. Имеем m-мерную цепную дробь

$$\begin{bmatrix} & 1 & \cdots & 1 & \cdots \\ a_0^{(m)} & a_1^{(m)} & \cdots & a_n^{(m)} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0^{(1)} & a_1^{(1)} & \cdots & a_n^{(1)} & \cdots \end{bmatrix}.$$

1.5. Две m-мерные цепные дроби будем называть *равными*, если совпадают последовательности их векторов подходящих дробей, то есть

$$\begin{bmatrix} & a_1^{(m+1)} & \cdots & a_n^{(m+1)} & \cdots \\ a_0^{(m)} & a_1^{(m)} & \cdots & a_n^{(m)} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0^{(1)} & a_1^{(1)} & \cdots & a_n^{(1)} & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & b_1^{(m+1)} & \cdots & b_n^{(m+1)} & \cdots \\ b_0^{(m)} & b_1^{(m)} & \cdots & b_n^{(m)} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_0^{(1)} & b_1^{(1)} & \cdots & b_n^{(1)} & \cdots \end{bmatrix}, \qquad (1.4)$$

если $\mathbf{D}_n^{(m)} = \mathbf{D}'^{(m)}_n$, $n = 0, 1, \ldots,$ где $\mathbf{D}_n^{(m)}$ — вектор n-х подходящих дробей цепной дроби, стоящей в последнем равенстве слева, а $\mathbf{D}'^{(m)}_n$ — аналогичный вектор дроби справа.

По индукции легко доказать, что (1.4) верно тогда и только тогда, когда элементы членов звеньев m-мерных цепных дробей связаны:

$$b_n^{(\nu)} = p_{n-\nu+1} \cdot \ldots \cdot p_n a_n^{(\nu)},\ \nu = 1, 2, \ldots, m+1,\ n = 0, 1, \ldots, \qquad (1.5)$$

где $p_1, p_2, \ldots$ — произвольная последовательность ненулевых элементов (чисел), $p_k = 1,\ k = 0, -1, \ldots, -(m-1)$. Равенство (1.4) с (1.5) в теории обычных цепных дробей называется *тождественным преобразованием* [11].

1.6. Выше было отмечено, что при $m = 1$ соотношения (1.1) и (1.2) приводят к обычной цепной дроби, которую можно записать в виде

$$a_0^{(1)} + \cfrac{a_1^{(2)}}{a_1^{(1)} + \cfrac{a_2^{(2)}}{a_2^{(1)} + \ddots}}. \qquad (1.6)$$

Попытаемся и в случае $m > 1$ найти выражение m-мерной цепной дроби (1.1) — (1.2), аналогичное (1.6). Для первых векторов $\mathbf{A}_n^{(m+1)}$ имеем:

$$\mathbf{A}_0^{(m+1)} = \begin{pmatrix} a_0^{(1)} \\ a_0^{(2)} \\ \cdots \\ a_0^{(m)} \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_1^{(m+1)} = \begin{pmatrix} a_1^{(2)} + a_1^{(1)} a_0^{(1)} \\ a_1^{(3)} + a_1^{(1)} a_0^{(2)} \\ \cdots \\ a_1^{(m+1)} + a_1^{(1)} a_0^{(m)} \\ a_1^{(1)} \end{pmatrix},\ \mathbf{A}_2^{(m+1)} = \begin{pmatrix} a_2^{(1)}(a_1^{(2)} + a_1^{(1)} a_0^{(1)}) + a_2^{(2)} a_0^{(1)} + a_2^{(3)} \\ a_2^{(1)}(a_1^{(3)} + a_1^{(1)} a_0^{(2)}) + a_2^{(2)} a_0^{(2)} + a_2^{(4)} \\ \cdots \\ a_2^{(1)}(a_1^{(m+1)} + a_1^{(1)} a_0^{(m)}) + a_2^{(2)} a_0^{(m)} \\ a_2^{(1)} a_1^{(1)} + a_2^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Отсюда, выражая векторы подходящих дробей, получаем:

$$\mathbf{D}_0^{(m)} = (a_0^{(1)}, a_0^{(2)}, \ldots, a_0^{(m)}),\ \mathbf{D}_1^{(m)} = \left(a_0^{(1)} + \frac{a_1^{(2)}}{a_1^{(1)}}, a_0^{(2)} + \frac{a_1^{(3)}}{a_1^{(1)}}, \ldots, a_0^{(m)} + \frac{a_1^{(m+1)}}{a_1^{(1)}} \right),$$

$$\frac{A_2^{(1)}}{A_2^{(m+1)}} = a_0^{(1)} + \cfrac{a_1^{(2)} + \cfrac{a_2^{(3)}}{a_2^{(1)}}}{a_1^{(1)} + \cfrac{a_2^{(2)}}{a_2^{(1)}}},\ \frac{A_2^{(2)}}{A_2^{(m+1)}} = a_0^{(2)} + \cfrac{a_1^{(3)} + \cfrac{a_2^{(4)}}{a_2^{(1)}}}{a_1^{(1)} + \cfrac{a_2^{(2)}}{a_2^{(1)}}}, \ldots, \frac{A_2^{(m)}}{A_2^{(m+1)}} = a_0^{(m)} + \cfrac{a_1^{(m+1)}}{a_1^{(1)} + \cfrac{a_2^{(2)}}{a_2^{(1)}}}.$$

Легко заметить закон роста «многоэтажности» подходящих дробей, согласно которому понятие m-мерной дроби можно ввести следующим образом. Пусть задана $m+1$ последовательность каких-либо символов:

$$\begin{array}{cccc} & a_1^{(m+1)}, & a_2^{(m+1)}, & \dots, \\ a_0^{(m)}, & a_1^{(m)}, & a_2^{(m)}, & \dots, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0^{(2)}, & a_1^{(2)}, & a_2^{(2)}, & \dots, \\ a_0^{(1)}, & a_1^{(1)}, & a_2^{(1)}, & \dots. \end{array} \tag{1.7}$$

Определим формально операцию, применяемую к символам этих последовательностей, которая заключается в переходе от символа $a_n^{(\nu)}$ ($\nu = 1, 2, \dots, m,\ n = 0, 1, \dots$) к символу $a_n^{(\nu)} + \dfrac{a_{n+1}^{(\nu+1)}}{a_{n+1}^{(1)}}$. Последовательно применим эту операцию к символам (1.7), причем операция применяется лишь к символам, имеющим наибольший нижний индекс. Итак, начиная, например, с $a_0^{(\nu)}$, получаем последовательность дробей:

$$a_0^{(\nu)},\ a_0^{(\nu)} + \frac{a_1^{(\nu+1)}}{a_1^{(1)}},\ a_0^{(\nu)} + \frac{a_1^{(\nu+1)} + \dfrac{a_2^{(\nu+2)}}{a_2^{(1)}}}{a_1^{(1)} + \dfrac{a_2^{(2)}}{a_2^{(1)}}}, \dots,$$

где все $a_n^{(\nu+j)} = 0$, если $\nu + j > m+1$. После «бесконечного числа» шагов получаем последовательность «многоэтажных» дробей, которая и будет последовательностью подходящих дробей вида $\dfrac{A_0^{(\nu)}}{A_0^{(m+1)}}, \dfrac{A_1^{(\nu)}}{A_1^{(m+1)}}, \dfrac{A_2^{(\nu)}}{A_2^{(m+1)}}, \dots,$ то есть последовательность $\nu - x$ координат векторов подходящих дробей $\mathbf{D}_0^{(m)}, \mathbf{D}_1^{(m)}, \mathbf{D}_2^{(m)}, \dots$

2. Разложения

2.1. Для обычных цепных дробей известно [12] разложение любой бесконечно дифференцируемой функции $x(t)$ (производная n-го порядка $x^{(n)}(t_0) \neq 0, n = 1, 2, \dots$) в цепную дробь в окрестности t_0:

$$x(t) = \left[x_0, \frac{T}{x_{10}}, \frac{T}{x_{20}}, \dots \right], \tag{2.1}$$

где $T = t - t_0$, $x_{n0} = x_n(t_0)$, а функция $x_n(t)$ связана с $x_{n-1}(t)$ соотношением

$$x_n(t) = \frac{T}{x_{n-1}(t) - x_{n-1,0}},\ x_0(t) = x(t).$$

Обычно разложение (2.1) называется *формулой Тиле* [11]. Используя ее, можно получить разложения в цепные дроби многих известных функций [12], пригодные для вычисления, например, их значений.

2.2. Разложение, аналогичное приведенному выше, для m-мерных цепных дробей, по всей видимости, будет иметь вид

$$\left(x_1(t),\dots,x_m(t)\right)=\begin{bmatrix} & T & \cdots & T^p & \cdots & T^{m-1} & T^m & \cdots \\ x_{m,0,0} & \alpha_1^{(m)}T & \cdots & \alpha_p^{(m)}T^p & \cdots & \alpha_{m-1}^{(m)}T^{m-1} & \alpha_m^{(m)}T^{m-1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{p+1,0,0} & \alpha_1^{(p+1)}T & \cdots & \alpha_p^{(p+1)}T^p & \cdots & \alpha_{m-1}^{(p+1)}T^p & \alpha_m^{(p+1)}T^p & \cdots \\ x_{p,0,0} & \alpha_1^{(p)}T & \cdots & \alpha_p^{(p)}T^{p-1} & \cdots & \alpha_{m-1}^{(p)}T^{p-1} & \alpha_m^{(p)}T^{p-1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{2,0,0} & \alpha_1^{(2)}T & \cdots & \alpha_p^{(2)}T & \cdots & \alpha_{m-1}^{(2)}T & \alpha_m^{(2)}T & \cdots \\ x_{1,0,0} & \alpha_1^{(1)} & \cdots & \alpha_p^{(1)} & \cdots & \alpha_{m-1}^{(1)} & \alpha_m^{(1)} & \cdots \end{bmatrix},$$

где $x_{k,0,0}=x_{k0}(t_0),\ k=1,2,\dots,m,\ \alpha_j^{(k)},\ j=1,2,\dots,$ неизвестные пока постоянные. Полагая $x_{k0}(t)=x_k(t),$ получаем:

$$x_{m0}(t)=x_{m,0,0}+\cfrac{T}{\alpha_1^{(1)}+\cfrac{\alpha_2^{(2)}T+\cfrac{\alpha_3^{(3)}T^2+\cdots}{\alpha_3^{(1)}+\cdots}}{\alpha_2^{(1)}+\cfrac{\alpha_3^{(2)}T+\cdots}{\alpha_3^{(1)}+\cdots}}},\quad x_{m-1,0}(t)=x_{m-1,0,0}+\cfrac{\alpha_1^{(m)}T+\cfrac{T^2}{\alpha_2^{(1)}+\cfrac{\alpha_3^{(2)}T+\cdots}{\alpha_3^{(1)}+\cdots}}}{\alpha_1^{(1)}+\cfrac{\alpha_2^{(2)}T+\cfrac{\alpha_3^{(3)}T^2+\cdots}{\alpha_3^{(1)}+\cdots}}{\alpha_2^{(1)}+\cfrac{\alpha_3^{(2)}T+\cdots}{\alpha_3^{(1)}+\cdots}}}$$

и так далее. Из первого соотношения $\dfrac{T}{x_{m0}(t)-x_{m,0,0}}=\alpha_1^{(1)}+\cfrac{\alpha_2^{(2)}T+\cfrac{\alpha_3^{(3)}T^2+\cdots}{\alpha_3^{(1)}+\cdots}}{\alpha_2^{(1)}+\cfrac{\alpha_3^{(2)}T+\cdots}{\alpha_3^{(1)}+\cdots}}.$

По определению полагаем: $x_{11}(t)=\dfrac{t-t_0}{x_{m0}(t)-x_{m,0,0}}.$ Тогда $\alpha_1^{(1)}=x_{110}.$

Далее, из второго соотношения с учетом уже полученного

$$\frac{x_{m-1,0}(t)-x_{m-1,0,0}}{x_{m0}(t)-x_{m,0,0}}=\alpha_1^{(m)}+\cfrac{T}{\alpha_2^{(1)}+\cfrac{\alpha_3^{(2)}T+\cdots}{\alpha_3^{(1)}+\cdots}},$$

отсюда $x_{m1}(t)=\dfrac{x_{m-1,0}(t)-x_{m-1,0,0}}{x_{m0}(t)-x_{m,0,0}},\ \alpha_1^{(m)}=x_{m,1,0}.$

Продолжая процесс, получаем:

$$\frac{x_{p0}(t)-x_{p,0,0}}{x_{m0}(t)-x_{m,0,0}}=\alpha_1^{(p+1)}+\cfrac{\alpha_2^{(p+2)}T+\cfrac{\alpha_3^{(p+3)}T^2+\cdots}{\alpha_3^{(1)}+\cdots}}{\alpha_2^{(1)}+\cfrac{\alpha_3^{(2)}T+\cdots}{\alpha_3^{(1)}+\cdots}},\ x_{p+1,1}(t)=\frac{x_{p0}(t)-x_{p,0,0}}{x_{m0}(t)-x_{m,0,0}},\ \alpha_1^{(p+1)}=x_{p+1,1,0},\ p=1,\dots,m.$$

Используя индукцию по n, нетрудно убедиться в справедливости соотношений $\alpha_n^{(\nu)}=x_{\nu,n,0},\ \nu=1,2,\dots,m,\ n=1,2,\dots$

Таким образом, m-мерная вектор-функция скалярного аргумента $\mathbf{x}(t)=(x_1(t),\dots,x_m(t))$ разлагается в следующую m-мерную цепную дробь:

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} & T & \cdots & T^p & \cdots & T^{m-1} & T^m & \cdots \\ x_{m,0,0} & x_{m,1,0}T & \cdots & x_{m,p,0}T^p & \cdots & x_{m,m-1,0}T^{m-1} & x_{m,m,0}T^{m-1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{p+1,0,0} & x_{p+1,1,0}T & \cdots & x_{p+1,p,0}T^p & \cdots & x_{p+1,m-1,0}T^p & x_{p+1,m,0}T^p & \cdots \\ x_{p,0,0} & x_{p,1,0}T & \cdots & x_{p,p,0}T^{p-1} & \cdots & x_{p,m-1,0}T^{p-1} & x_{p,m,0}T^{p-1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{2,0,0} & x_{2,1,0}T & \cdots & x_{2,p,0}T & \cdots & x_{2,m-1,0}T & x_{2,m,0}T & \cdots \\ x_{1,0,0} & x_{1,1,0} & \cdots & x_{1,p,0} & \cdots & x_{1,m-1,0} & x_{1,m,0} & \cdots \end{array}\right], \tag{2.2}$$

где $T=t-t_0$, $x_{\nu,n,0}=x_{\nu n}(t_0)$, $\nu=1,2,\dots,m$, $n=0,1,\dots$, $x_{\nu 0}(t)=x_\nu(t)$,

$$x_{\nu n}(t)=\frac{x_{\nu-1,n-1}(t)-x_{\nu-1,n-1,0}}{x_{m,n-1}(t)-x_{m,n-1,0}},\ \nu=1,2,\dots,m,\ n=1,2,\dots,\ x_{0n}(t)=t. \tag{2.3}$$

2.3. Рассмотрим несколько конкретных вектор-функций.

А) Сначала найдем разложение в двумерную цепную дробь вектора $(\alpha^{(1)}\omega^2+\beta^{(1)}\omega+\gamma^{(1)},\alpha^{(2)}\omega^2+\beta^{(2)}\omega+\gamma^{(2)})$ при некотором t, $\omega^3=t$, $t_0=D^3$. Имеем:

$$x_{1,0,0}=\alpha^{(1)}D^2+\beta^{(1)}D+\gamma^{(1)},\ x_{2,0,0}=\alpha^{(2)}D^2+\beta^{(2)}D+\gamma^{(2)}.$$

Далее $x_{11}(t)=\dfrac{\omega^3-D^3}{\alpha^{(2)}(\omega^2-D^2)+\beta^{(2)}(\omega-D)}=\dfrac{\omega^2+\omega D+D^2}{\alpha^{(2)}(\omega+D)+\beta^{(2)}}$, то есть $x_{110}=\dfrac{3D^2}{2\alpha^{(2)}D+\beta^{(2)}}$,

$x_{21}(t)=\dfrac{\alpha^{(1)}(\omega^2-D^2)+\beta^{(1)}(\omega-D)}{\alpha^{(2)}(\omega^2-D^2)+\beta^{(2)}(\omega-D)}=\dfrac{\alpha^{(1)}(\omega+D)+\beta^{(1)}}{\alpha^{(2)}(\omega+D)+\beta^{(2)}}$. Отсюда $x_{210}=\dfrac{2\alpha^{(1)}D+\beta^{(1)}}{2\alpha^{(2)}D+\beta^{(2)}}$.

Продолжим процесс: $x_{12}(t)=\dfrac{(2\alpha^{(2)}D+\beta^{(2)})(\alpha^{(2)}(\omega+D)+\beta^{(2)})(\omega^2+\omega D+D^2)}{\alpha^{(1)}\beta^{(2)}-\alpha^{(2)}\beta^{(1)}}$,

$x_{22}(t)=\dfrac{(\alpha^{(2)}D+\beta^{(2)})(\omega+D)+D(\alpha^{(2)}\omega+\beta^{(2)})}{\alpha^{(1)}\beta^{(2)}-\alpha^{(2)}\beta^{(1)}}$ и, значит, $x_{120}=\dfrac{3D^2(2\alpha^{(2)}D+\beta^{(2)})^2}{\alpha^{(1)}\beta^{(2)}-\alpha^{(2)}\beta^{(1)}}$,

$x_{220}=\dfrac{3D(\alpha^{(2)}D+\beta^{(2)})}{\alpha^{(1)}\beta^{(2)}-\alpha^{(2)}\beta^{(1)}}$. Далее будет получаться $x_{130}=\dfrac{3D^2(\alpha^{(1)}\beta^{(2)}-\alpha^{(2)}\beta^{(1)})}{2\alpha^{(2)}D+\beta^{(2)}}$,

$x_{230}=3D(3\alpha^{(2)}D+\beta^{(2)})$, $x_{140}=\dfrac{3D^2}{5\alpha^{(2)}D+\beta^{(2)}}$, $x_{240}=\dfrac{3D(\alpha^{(1)}\beta^{(2)}-\alpha^{(2)}\beta^{(1)})}{(2\alpha^{(2)}D+\beta^{(2)})(5\alpha^{(2)}D+\beta^{(2)})}$.

Используя индукцию, нетрудно доказать: $x_{1,3n-1,0}=\dfrac{3D^2((3n-1)\alpha^{(2)}D+\beta^{(2)})^2}{\alpha^{(1)}\beta^{(2)}-\alpha^{(2)}\beta^{(1)}}$,

$x_{2,3n-1,0}=\dfrac{3D((3n-2)\alpha^{(2)}D+\beta^{(2)})}{\alpha^{(1)}\beta^{(2)}-\alpha^{(2)}\beta^{(1)}}$, $x_{1,3n,0}=\dfrac{3D^2(\alpha^{(1)}\beta^{(2)}-\alpha^{(2)}\beta^{(1)})}{(3n-1)\alpha^{(2)}D+\beta^{(2)}}$, $x_{2,3n,0}=3D(3n\alpha^{(2)}D+\beta^{(2)})$,

$x_{1,3n+1,0}=\dfrac{3D^2}{(3n+2)\alpha^{(2)}D+\beta^{(2)}}$, $x_{2,3n+1,0}=\dfrac{3D(\alpha^{(1)}\beta^{(2)}-\alpha^{(2)}\beta^{(1)})}{((3n-1)\alpha^{(2)}D+\beta^{(2)})((3n+2)\alpha^{(2)}D+\beta^{(2)})}$.

Таким образом, рассматриваемая вектор-функция разлагается в следующую двумерную цепную дробь:

$$\left[\begin{array}{ccccc} & T & T^2 & \cdots & T^2 \\ \alpha^{(2)}D^2+\beta^{(2)}D+\gamma^{(2)} & \dfrac{2\alpha^{(1)}D+\beta^{(1)}}{2\alpha^{(2)}D+\beta^{(2)}}T & \dfrac{3D(\alpha^{(2)}D+\beta^{(2)})}{\alpha^{(1)}\beta^{(2)}-\alpha^{(2)}\beta^{(1)}}T & \cdots & \dfrac{3D((3n-2)\alpha^{(2)}D+\beta^{(2)})}{\alpha^{(1)}\beta^{(2)}-\alpha^{(2)}\beta^{(1)}}T \\ \alpha^{(1)}D^2+\beta^{(1)}D+\gamma^{(1)} & \dfrac{3D^2}{2\alpha^{(2)}D+\beta^{(2)}} & \dfrac{3D^2(2\alpha^{(2)}D+\beta^{(2)})^2}{\alpha^{(1)}\beta^{(2)}-\alpha^{(2)}\beta^{(1)}} & \cdots & \dfrac{3D^2((3n-1)\alpha^{(2)}D+\beta^{(2)})^2}{\alpha^{(1)}\beta^{(2)}-\alpha^{(2)}\beta^{(1)}} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc} T^2 & T^2 & \cdots \\ 3D(3n\alpha^{(2)}D+\beta^{(2)})T & \dfrac{3D(\alpha^{(1)}\beta^{(2)}-\alpha^{(2)}\beta^{(1)})}{((3n-1)\alpha^{(2)}D+\beta^{(2)})((3n+2)\alpha^{(2)}D+\beta^{(2)})}T & \cdots \\ \dfrac{3D^2(\alpha^{(1)}\beta^{(2)}-\alpha^{(2)}\beta^{(1)})}{(3n-1)\alpha^{(2)}D+\beta^{(2)}} & \dfrac{3D^2}{(3n+2)\alpha^{(2)}D+\beta^{(2)}} & \cdots \end{array}\right].$$

Три последних звена в этой записи суть звенья с индексами соответственно $3n-1,\ 3n,\ 3n+1,\ n=1,2,\ldots,\ T=t-D^3$. Легко видеть, что при $\alpha^{(2)}=0$ полученное разложение становится периодическим, если следовать терминологии обычных цепных дробей. Это разложение

$$\left[\begin{array}{cccccccc} & T & T^2 & \cdots & T^2 & T^2 & T^2 & \cdots \\ \beta^{(2)}D+\gamma^{(2)} & \dfrac{2\alpha^{(1)}D+\beta^{(1)}}{\beta^{(2)}}T & \dfrac{3D}{\alpha^{(1)}}T & \cdots & \dfrac{3D}{\alpha^{(1)}}T & 3\beta^{(2)}DT & \dfrac{3\alpha^{(1)}D}{\beta^{(2)}}T & \cdots \\ \alpha^{(1)}D^2+\beta^{(1)}D+\gamma^{(1)} & \dfrac{3D^2}{\beta^{(2)}} & \dfrac{3\beta^{(2)}D^2}{\alpha^{(1)}} & \cdots & \dfrac{3\beta^{(2)}D^2}{\alpha^{(1)}} & 3\alpha^{(1)}D^2 & \dfrac{3D^2}{\beta^{(2)}} & \cdots \end{array}\right].$$

Наконец, в простейшем случае $\alpha^{(1)}=\beta^{(2)}=1,\alpha^{(2)}=\beta^{(1)}=\gamma^{(1)}=\gamma^{(2)}=0$:

$\left(\sqrt[3]{t^2},\sqrt[3]{t}\right)=\begin{bmatrix} & T & T^2 & \cdots \\ D & 2DT & 3DT & \cdots \\ D^2 & 3D^2 & 3D^2 & \cdots \end{bmatrix}$. Вот так $\left[\begin{array}{ccc} & T & \begin{pmatrix} T^2 \\ 3DT \\ 3D^2 \end{pmatrix} \\ D & 2DT & \\ D^2 & 3D^2 & \end{array}\right]$ лучше записывать периодические цепные дроби, выделяя период и предпериод.

Б) Найдем разложение в четырехмерную цепную дробь вектор-функции $(\sqrt[5]{t^4},\sqrt[5]{t^3},\sqrt[5]{t^2},\sqrt[5]{t})$, полагая $t_0=D^5,\ t=\omega^5$. Имеем

$$x_{100}=D^4,\ x_{200}=D^3,\ x_{300}=D^2,\ x_{400}=D,\ \ x_{11}(t)=\frac{\omega^5-D^5}{\omega-D}=\sum_{k=0}^{4}\omega^{4-k}D^k,$$

$$x_{21}(t)=\frac{\omega^4-D^4}{\omega-D}=\sum_{k=0}^{3}\omega^{3-k}D^k,\ \ x_{31}(t)=\frac{\omega^3-D^3}{\omega-D}=\sum_{k=0}^{2}\omega^{2-k}D^k,\ x_{41}(t)=\frac{\omega^2-D^2}{\omega-D}=\omega+D.$$

Таким образом, $x_{110}=5D^4,\ x_{210}=4D^3,\ x_{310}=3D^2,\ x_{410}=2D$. Далее можно найти:

$$x_{120}=5D^4,\ x_{220}=10D^3,\ x_{320}=6D^2,\ x_{420}=3D,\ x_{130}=5D^4,\ x_{230}=10D^3,\ x_{330}=10D^2,\ x_{430}=4D,$$
$$x_{140}=5D^4,\ x_{240}=10D^3,\ x_{340}=10D^2,\ x_{440}=5D,\ x_{150}=5D^4,\ x_{250}=10D^3,\ x_{350}=10D^2,\ x_{450}=5D$$

и так далее. С 4-го звена будет однозвенная периодичность. Получаем:

$$(\sqrt[5]{t^4},\sqrt[5]{t^3},\sqrt[5]{t^2},\sqrt[5]{t})=\left[\begin{matrix} & T & T^2 & T^3 \\ D & 2DT & 3DT^2 & 4DT^3 \\ D^2 & 3D^2T & 6D^2T^2 & 10D^2T^2 \\ D^3 & 4D^3T & 10D^3T & 10D^3T \\ D^4 & 5D^4 & 5D^4 & 5D^4 \end{matrix}\left(\begin{matrix} T^4 \\ 5DT^3 \\ 10D^2T^2 \\ 10D^3T \\ 5D^4 \end{matrix}\right)\right].$$

2.4. Найдем разложение в $(m-1)$-мерную цепную дробь вида (2.2) вектор-функции $\left(\sqrt[m]{t^{m-1}},\ldots,\sqrt[m]{t}\right)$, $t_0=D^m$. Для этого докажем три леммы.

Лемма 1. *Функции* $x_{\nu n}(t)$ *из (2.3) имеют вид*

$$x_{\nu n}(t)=\sum_{k=0}^{m-\nu}a_{\nu n}^{(k)}D^k\omega^{m-\nu-k}, \tag{2.4}$$

$\omega=\sqrt[m]{t}$, $\nu=1,2,\ldots,m-1$, $n=0,1,\ldots$, *причем* $a_{\nu n}^{(0)}=1$.

Доказательство. Используем индукцию по n. Утверждение очевидно при $n=0$. Пусть лемма справедлива при $n=0,1,\ldots,p-1$, тогда

$$x_{\nu p}(t)=\frac{x_{\nu-1,p-1}(t)-x_{\nu-1,p-1,0}}{x_{m-1,p-1}(t)-x_{m-1,p-1,0}}=\frac{\sum_{k=0}^{m-\nu+1}a_{\nu-1,p-1}^{(k)}D^k\omega^{m-\nu+1-k}-\sum_{k=0}^{m-\nu+1}a_{\nu-1,p-1}^{(k)}D^{m-\nu+1}}{(\omega+a_{m-1,p-1}^{(1)}D)-(D+a_{m-1,p-1}^{(1)}D)}=$$

$$=\frac{\sum_{k=0}^{m-\nu}a_{\nu-1,p-1}^{(k)}D^k(\omega^{m-\nu+1-k}-D^{m-\nu+1-k})}{\omega-D}=\sum_{k=0}^{m-\nu}a_{\nu-1,p-1}^{(k)}D^k\sum_{j=0}^{m-\nu-k}D^j\omega^{m-\nu-k-j}=$$

$$=\sum_{k=0}^{m-\nu}a_{\nu-1,p-1}^{(k)}(D^k\omega^{m-\nu-k}+\ldots+D^{k+j}\omega^{m-\nu-(k+j)}+\ldots+D^{m-\nu})=\sum_{k=0}^{m-\nu}\sum_{j=0}^{k}a_{\nu-1,p-1}^{(j)}D^k\omega^{m-\nu-k}=\sum_{k=0}^{m-\nu}a_{\nu p}^{(k)}D^k\omega^{m-\nu-k}.$$

При этом $a_{\nu p}^{(0)}=\sum_{k=0}^{0}a_{\nu-1,p-1}^{(0)}=a_{\nu-1,p-1}^{(0)}=1$. Согласно принципу математической индукции отсюда следует справедливость леммы для $n=0,1,\ldots$ □

Следствие 1. При $\nu=m-1$ из леммы 1 вытекает:

$$x_{m-1,n}(t)=\sqrt[m]{t}+a_{m-1,n}^{(1)}D,\ x_{m-1,n,0}=(1+a_{m-1,n}^{(1)})D,\ x_{m-1,n}(t)-x_{m-1,n,0}=\sqrt[m]{t}-D.$$

Следствие 2. Коэффициенты $a_{\nu n}^{(k)}$ в представлениях $x_{\nu n}(t)$ в виде (2.4) удовлетворяют рекуррентным соотношениям $a_{\nu n}^{(k)}=\sum_{j=0}^{k}a_{\nu-1,n-1}^{(j)}$, $a_{\nu-1,n-1}^{(0)}=1$.

Лемма 2. *Функции (2.4) удовлетворяют* $x_{\nu,\nu+1}(t)=x_{\nu\nu}(t)$, $\nu=1,2,\ldots,m-1$.

Доказательство. При $\nu=1$ согласно (2.3) имеем:

$$x_{11}(t)=\frac{x_{00}(t)-x_{000}}{x_{m-1,0}(t)-x_{m-1,0,0}}=\frac{\omega^m-D^m}{\omega-D}=\sum_{k=0}^{m-1}D^k\omega^{m-k-1}.$$

Далее, $x_{12}(t)=\dfrac{x_{01}(t)-x_{010}}{x_{m-1,1}(t)-x_{m-1,1,0}}=\dfrac{\omega^m-D^m}{\omega-D}$, то есть при $\nu=1$ лемма имеет место. Допустим теперь, что $x_{\nu,\nu+1}(t)=x_{\nu\nu}(t)$, $\nu=1,2,\ldots,p-1$, $p<m$. Тогда

$x_{p,p+1}(t)=\dfrac{x_{p-1,p}(t)-x_{p-1,p,0}}{x_{m-1,p}(t)-x_{m-1,p,0}}$. Отсюда, согласно индуктивному предположению и следствию 1 из леммы 1, вытекает $x_{p,p+1}(t)=\dfrac{x_{p-1,p-1}(t)-x_{p-1,p-1,0}}{\omega-D}$, то есть согласно (2.3) $x_{p,p+1}(t)=x_{pp}(t)$. □

Следствие 1. Для функций (2.4) имеют место равенства

$$x_{\nu,\nu+s}(t)=x_{\nu\nu}(t),\ \nu=1,2,\ldots,m,\ s=0,1,\ldots.$$

Доказательство. При $s=0$ следствие очевидно, при $s=1$ оно вытекает из леммы. Пусть утверждение следствия верно при $s=0, 1, \ldots, p-1$. Тогда, согласно следствию 1 из леммы 1, $x_{\nu,\nu+p}(t)=\dfrac{x_{\nu-1,\nu+p-1}(t)-x_{\nu-1,\nu+p-1,0}}{\omega-D}$.

Отсюда по индуктивному предположению и лемме

$$x_{\nu,\nu+p}(t)=\frac{x_{\nu-1,\nu+p-1}(t)-x_{\nu-1,\nu+p-1,0}}{\omega-D}=\frac{x_{\nu-1,\nu-1}(t)-x_{\nu-1,\nu-1,0}}{\omega-D}=x_{\nu\nu}(t),$$

то есть согласно индукции следствие доказано. □

Следствие 2. Начиная с $m-1$ искомое разложение становится однозвенно периодическим. В самом деле, начиная с $\nu=m-1$, равенства $x_{\nu,\nu+s}(t)=x_{\nu\nu}(t)$ выполняются для всех функций (2.4).

Лемма 3. *Коэффициенты* $a^{(k)}_{\nu,n+1}$ *функций (2.4) имеют вид*

$$a^{(k)}_{\nu,n+1}=C^n_{n+k}=\frac{(n+k)!}{n!k!},\ \nu=1,2,\ldots,m-1,\ n=1,2,\ldots,\nu,\ k=0,1,\ldots,m-\nu. \quad (2.5)$$

Доказательство. Утверждение при $n=0$: $a^{(k)}_{\nu 1}=1=C^0_k$, $k=0,1,\ldots,m-\nu$ очевидно. Допустим, что (2.5) имеют место и при $n=0, 1, \ldots, p-1$. Тогда согласно следствию 2 из леммы 1 $a^{(k)}_{\nu p}=1+\sum\limits_{j=1}^{k}a^{(j)}_{\nu-1,p-1}=1+\sum\limits_{j=1}^{k}C^{p-2}_{p-2+j}=\sum\limits_{j=0}^{k}C^{p-2}_{p-2+j}$.

Отсюда по известной формуле $a^{(k)}_{\nu p}=C^{p-1}_{p-1+k}$. □

Следствие 1. Коэффициенты искомого разложения имеют вид

$$x_{\nu n0}=x_{\nu n}(t_0)=C^n_{m-\nu+n}D^{m-\nu},\ \nu=1,2,\ldots,m-1,\ n=1,2,\ldots,\nu.$$

Доказательство. Согласно лемме 1, следствию 1 из леммы 1 и лемме 3, $x_{\nu n0}=\sum\limits_{k=0}^{m-\nu}a^{(k)}_{\nu n}D^{m-\nu}=a^{(m-\nu)}_{\nu+1,n+1}D^{m-\nu}=C^n_{m-\nu+n}D^{m-\nu}$. Таким образом, можно записать, наконец, искомое разложение:

$$\begin{bmatrix}
 & T & T^2 & \ldots & T^p & \ldots & T^{m-1}\\
D & C^1_2DT & C^2_3DT^2 & \ldots & C^p_{p+1}DT^p & \ldots & C^{m-1}_mDT^{m-2}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
D^{m-p-1} & C^1_{m-p}D^{m-p-1}T & C^2_{m-p+1}D^{m-p-1}T^2 & \ldots & C^p_{m-1}D^{m-p-1}T^p & \ldots & C^{p+1}_mD^{m-p-1}T^p\\
D^{m-p} & C^1_{m-p+1}D^{m-p}T & C^2_{m-p+2}D^{m-p}T^2 & \ldots & C^p_mD^{m-p}T^{p-1} & \ldots & C^p_mD^{m-p}T^{p-1}\\
D^{m-p+1} & C^1_{m-p+2}D^{m-p+1}T & C^2_{m-p+3}D^{m-p+1}T^2 & \ldots & C^{p-1}_mD^{m-p+1}T^{p-2} & \ldots & C^{p-1}_mD^{m-p+1}T^{p-2}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
D^{m-2} & C^1_{m-1}D^{m-2}T & C^2_mD^{m-2}T & \ldots & C^2_mD^{m-2}T & \ldots & C^2_mD^{m-2}T\\
D^{m-1} & \boxed{C^1_mD^{m-1}} & C^1_mD^{m-1} & \ldots & C^1_mD^{m-1} & \ldots & C^1_mD^{m-1}
\end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Это однозвенно периодическая $(m-1)$-мерная цепная дробь, период которой начинается с $(m-1)$-го звена. □

2.5. Используя тождественное преобразование многомерных цепных дробей, описанное в 1.5, приведем полученное разложение (2.6) к виду обыкновенной $(m-1)$-мерной цепной дроби, то есть к виду, в котором верхняя строка таблицы (цепной дроби) состоит лишь из единиц. Подбираем последовательность множителей $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ так, чтобы

$$p_k p_{k+1} \cdot \ldots \cdot p_{m+k-1} T^{m-1} = 1 \tag{2.7}$$

для любого $k = 1, 2, \dots$, при этом $p_i = 1, i = 0, -1, \dots, 1-(m-1)$. Нетрудно убедиться, что (2.7) имеют место, если все $p_k = T^{-1}, k \neq ml, p_{ml} = 1, l = 1, 2, \dots$

$$\left[\begin{matrix}
D & C_2^1 D & C_3^2 D & \cdots & C_{p+1}^p D & \cdots \\
D^2 & C_3^1 D^2 & C_4^2 D^2 & \cdots & C_{p+2}^p D^2 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
D^{m-p-1} & C_{m-p}^1 D^{m-p-1} & C_{m-p+1}^2 D^{m-p-1} & \cdots & C_{m-1}^p D^{m-p-1} & \cdots \\
D^{m-p} & C_{m-p+1}^1 D^{m-p} & C_{m-p+2}^2 D^{m-p} & \cdots & C_m^p D^{m-p} T^{-1} & \cdots \\
D^{m-p+1} & C_{m-p+2}^1 D^{m-p+1} & C_{m-p+3}^2 D^{m-p+1} & \cdots & C_m^{p-1} D^{m-p+1} T^{-1} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
D^{m-2} & C_{m-1}^1 D^{m-2} & C_m^2 D^{m-2} T^{-1} & \cdots & C_m^2 D^{m-2} T^{-1} & \cdots \\
D^{m-1} & C_m^1 D^{m-1} T^{-1} & C_m^1 D^{m-1} T^{-1} & \cdots & C_m^1 D^{m-1} T^{-1} & \cdots
\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}
\cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots
\end{matrix}
\left(\begin{matrix}
C_m^{m-1} D T^{-1} & C_m^{m-1} D & C_m^{m-1} D & \cdots & C_m^{m-1} D \\
C_m^{m-2} D^2 T^{-1} & C_m^{m-2} D^2 & C_m^{m-2} D^2 & \cdots & C_m^{m-2} D^2 T^{-1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
C_m^{p+1} D^{m-p-1} T^{-1} & C_m^{p+1} D^{m-p-1} & C_m^{p+1} D^{m-p-1} & \cdots & C_m^{p+1} D^{m-p-1} T^{-1} \\
C_m^p D^{m-p} T^{-1} & C_m^p D^{m-p} & C_m^p D^{m-p} & \cdots & C_m^p D^{m-p} T^{-1} \\
C_m^{p-1} D^{m-p+1} T^{-1} & C_m^{p-1} D^{m-p+1} & C_m^{p-1} D^{m-p+1} & \cdots & C_m^{p-1} D^{m-p+1} T^{-1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
C_m^2 D^{m-2} T^{-1} & C_m^2 D^{m-2} & C_m^2 D^{m-2} & \cdots & C_m^2 D^{m-2} T^{-1} \\
C_m^1 D^{m-1} T^{-1} & C_m^1 D^{m-1} & C_m^1 D^{m-1} T^{-1} & \cdots & C_m^1 D^{m-1} T^{-1}
\end{matrix}\right)\right]. \tag{2.8}$$

В записи (2.8) верхняя строка, состоящая из единиц, опущена. То же и в последующих разложениях в правильные цепные дроби.

Таким образом, тождественное преобразование, примененное к (2.6), дает уже m-звенно периодическую $(m-1)$-мерную цепную дробь (2.8), период которой, как и ранее, начинается с $(m-1)$-го звена.

Отметим, что если $T \mid C_m^p D^{m-p}, p = 1, 2, \dots, m-1$, то разложение (2.8) становится правильной цепной дробью, естественно, если $T > 0$. Если же $T = 1$, то правильной цепной дробью является уже разложение (2.6).

Рассмотрим в заключение несколько примеров.

А) Если $m = 3$, то (2.8): $\left(\sqrt[3]{t^2}, \sqrt[3]{t}\right) = \left[\begin{matrix} D & 2D \\ D^2 & 3D^2T^{-1} \end{matrix} \left(\begin{matrix} 3DT^{-1} & 3D & 3D \\ 3D^2T^{-1} & 3D^2 & 3D^2T^{-1} \end{matrix}\right)\right]$.

При $t=D^3+1$, то есть $T=1$, получаем двумерную правильную цепную дробь $\begin{bmatrix} D & 2D & \begin{pmatrix} 3D \\ 3D^2 \end{pmatrix} \\ D^2 & 3D^2 & \end{bmatrix}$. При $t=D^3+D$: $\begin{bmatrix} D & 2D & \begin{pmatrix} 3 & 3D & 3D \\ 3D & 3D^2 & 3D \end{pmatrix} \\ D^2 & 3D & \end{bmatrix}$.

При $t=D^3+3$: $\begin{bmatrix} D & 2D & \begin{pmatrix} D & 3D & 3D \\ D^2 & 3D^2 & D^2 \end{pmatrix} \\ D^2 & D^2 & \end{bmatrix}$. Наконец, если $t=D^3+3D$, то

$$\begin{bmatrix} D & 2D & \begin{pmatrix} 1 & 3D & 3D \\ D & 3D^2 & D \end{pmatrix} \\ D^2 & D & \end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

В работе *Л. Бернштейна* [3] приводится разложение такого же вектора, найденное непосредственно с помощью алгоритма Якоби:

$$\begin{bmatrix} D & D-1 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} 2D-1 & D-1 & 0 & 1 \\ 3D^2+3 & D & 1 & D-1 \end{pmatrix} \\ D^2+1 & D & 1 & D & \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Сравним эти двумерные дроби при $D=2$, то есть разлагая $(\sqrt[3]{196}, \sqrt[3]{14})$. Разложение (2.10) примет вид

		2	1	0	0	3	1	0	1	3	…
		5	2	1	2	15	2	1	1	15	…
0	1	5	11	12	29	482	1005	1034	2521	41922	…
1	0	2	5	5	12	200	417	429	1046	17394	…
0	0	1	2	2	5	83	173	178	434	7217	…

Три последних строки — координаты подходящих векторов-столбцов.

Разложение (2.9) при $D=2$ будет иметь вид

		2	4	1	6	6	1	6	6	…
		4	2	2	12	2	2	12	2	…
0	1	4	12	29	424	1034	2521	36880	89920	…
1	0	2	5	12	176	429	1046	15302	37309	…
0	0	1	2	5	73	178	434	6349	15480	…

Некоторые подходящие векторы этих двух различных разложений совпадают. Это, по-видимому, будет иметь место и в более общем случае. Просто доказать, что $29^3+14\cdot 12^3+196\cdot 5^3-3\cdot 14\cdot 29\cdot 12\cdot 5=1$, то есть $\varepsilon=29+12\sqrt[3]{14}+5\sqrt[3]{196}$ — один из единичных элементов кольца $O[\sqrt[3]{14}]$, а $\varepsilon^{-1}=1+2\sqrt[3]{14}-\sqrt[3]{196}$. Легко проверить, что ε^{-1} — основная единица.

Б) Вот трехмерная цепная дробь, получающаяся из (2.8) при $m=4$:

$$\left(\sqrt[4]{t^3}, \sqrt[4]{t^2}, \sqrt[4]{t}\right)=\begin{bmatrix} D & 2D & 3D & \begin{pmatrix} 4DT^{-1} & 4D & 4D & 4D \\ 6D^2T^{-1} & 6D^2 & 6D^2 & 6D^2T^{-1} \\ 4D^3T^{-1} & 4D^3 & 4D^3T^{-1} & 4D^3T^{-1} \end{pmatrix} \\ D^2 & 3D^2 & 6D^2T^{-1} & \\ D^3 & 4D^3T^{-1} & 4D^3T^{-1} & \end{bmatrix}.$$

Отсюда имеем несколько правильных трехмерных цепных дробей.

При $t=D^4+1$: $\begin{bmatrix} D & 2D & 3D & \begin{pmatrix} 4D \\ 6D^2 \\ 4D^3 \end{pmatrix} \\ D^2 & 3D^2 & 6D^2 & \\ D^3 & 4D^3 & 4D^3 & \end{bmatrix}$.

$$\text{При } t=D^4+2:\begin{bmatrix} D & 2D & 3D & \begin{pmatrix} 2D & 4D & 4D & 4D \\ 3D^2 & 6D^2 & 6D^2 & 3D^2 \\ 2D^3 & 4D^3 & 2D^3 & 2D^3 \end{pmatrix} \\ D^2 & 3D^2 & 3D^2 & \\ D^3 & 2D^3 & 2D^3 & \end{bmatrix}.$$

$$\text{При } t=D^4+D:\begin{bmatrix} D & 2D & 3D & \begin{pmatrix} 4 & 4D & 4D & 4D \\ 6D & 6D^2 & 6D^2 & 6D \\ 4D^2 & 4D^3 & 4D^2 & 4D^2 \end{pmatrix} \\ D^2 & 3D^2 & 6D & \\ D^3 & 4D^2 & 4D^2 & \end{bmatrix}.$$

$$\text{При } t=D^4+2D:\begin{bmatrix} D & 2D & 3D & \begin{pmatrix} 2 & 4D & 4D & 4D \\ 3D & 6D^2 & 6D^2 & 3D \\ 2D^2 & 4D^3 & 2D^2 & 2D^2 \end{pmatrix} \\ D^2 & 3D^2 & 3D & \\ D^3 & 2D^2 & 2D^2 & \end{bmatrix}.$$

Аналоги подобных разложений автору пока неизвестны. В дальнейшем автор найдет единичные элементы колец $O\left[\sqrt[m]{t}\right]$ с помощью разложений (2.6) и (2.8) и в более общем случае попытается применить эти разложения к решению диофантовых уравнений, к которым сводится задача представления целого рационального числа разложимыми формами.

Список литературы

1. *Jacobi C. G. J.* Allgemeine Theorie der Kettenbruchänlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei Vorhergehenden gebildet wird // J. reine und angew. Math. 1868. Vol. 69. P. 29—64.

2. *Bernstein L.* Periodical continued fractions for irrationals of degree *n* by Jacobi's algorithm // Ibid. 1963. Vol. 213, N 1—2. P. 31—38.

3. *Bernstein L.* Periodical of Jacobi's algorithm for a special type of cubic irrationals // Ibid. 1964. Vol. 213, N 3—4. P. 137—146.

4. *Bernstein L.* The Jacobi—Perron algorithm // Ist Theory and application. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 207, N 1—4. Springer Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1971. P. 1—160.

5. *Bernstein L.* Units from periodic Jacobi—Perron algorithms in algebraic number fields of degree $n > 2$ // Manuscripta math. 1974. Vol. 14, N. 3. P. 249—261.

6. *Bernstein L.* Units and periodic Jacobi—Perron algorithms in real algebraic number fields of degree 3 // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. Vol. 212, N 485. P. 295—306.

7. *Bernstein L.* Der Hasse—Bernsteinsche Einheitensatz für den verallgemeinerten Jacobi—Perron Algorithmus // Abh. math. Semin. Univ. Hamburg, 1975. 43. P. 11—20.

8. *Perron O.* Der Jacobische Kettenalgorithmus in einem kubischen Zahlenkörper // Sitzungsber. Bauer. Acad. Wiss. Math. Naturwiss. Kl. 1972. T. 1. P. 13—49 ; 1973. T. 2. P. 9—22.

9. *Perron O.* Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus // Math. Ann. 1907. 64. P. 1—76.

10. *Brignon M. P.* Sur une generalisation de la notion de fraction continue // Compies rendus Acad. Sc. Paris, 1972. Vol. 214, N 4. P. A292—A295.

11. *Хованский А. Н.* Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М., 1956.

12. *Ауслендер Г.* О разложении функций в ряды и непрерывные дроби // Выч. мат. и матем. физики. 1963. Т. 3, № 3. С. 565—568.

13. *Шурыгин В. К.* Об одном алгоритме разложения в многомерную цепную дробь. Калининград, 1996. Деп. в ВИНИТИ 05.05.96, N 1463-В96.

14. *Шурыгин В. К.* К разложению кубических иррациональностей в двумерные цепные дроби. Калининград, 1996. Деп. в ВИНИТИ 22.11.96, N 3396-В96.

15. *Шурыгин В. К.* Единицы порядков полей вида $Q(\sqrt[3]{D})$ // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2011. Вып. 10. С. 110—112.

Об авторе

Виктор Константинович Шурыгин — доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: shuryginvictor@yandex.ru

About the author

Victor Shurygin — Ass. Prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: shuryginvictor@yandex.ru